

Collana del Dipartimento di Matematica G. Peano  
Università di Torino – DVD 8

# La Storia delle Matematiche nell'insegnamento

Livia Giacardi  
2006-2016



Copyright: Dipartimento di Matematica G. Peano  
Università di Torino – ISBN 97-888905842-0-6



Dipartimento di Matematica G. Peano – Università di Torino

## La storia delle matematiche nell'insegnamento

a cura di  
Livia Giacardi

*La storia delle matematiche nell'insegnamento*

*Il laboratorio di matematica e la sua storia*

*Laboratori del progetto Lauree Scientifiche 2006:*

- Dalle dimostrazioni visive a quelle deduttive
- Sistemi di numerazione nel mondo antico I parte, II parte

*Laboratori del progetto Lauree Scientifiche 2008:*

- Storia della geometria analitica e documenti
- Storia dell'algebra I parte

*Lectures mathématiques commentées de:*

Archimede, Euclide, Diofanto, Brahmagupta e Bhaskara, Al-Kwarizmi,  
O. Al-Khayyam, Leonardo Pisano, N. Tartaglia, S. Stevin, B. Pascal,  
R. Descartes, C. F. Gauss.

*Il convegno "La Storia della matematica nell'Insegnamento"*

Civiltà extraeuropee 1 (Mesopotamia) e 2 (Cina); Numeri figurati  
Laboratori per le maestre

2016 - Dipartimento di Matematica G. Peano – Università di Torino  
ISBN 97-888905842-0-6

La Storia delle matematiche nell'insegnamento - 2016

La Storia delle matematiche nell'insegnamento - 2016

# Lecture matematiche Pagine di matematica per la scuola

**C.F. Gauss (1777-1855)**  
*Disquisitiones Arithmeticae*, 1801, pp. 9-10

**Niccolò Fontana detto Tartaglia (1499-1557)**  
*Generali Trattato*, 1556  
**Semplice falsa posizione**  
*Della prima parte verso finta Falsatione di Simplicio*, 1556, Cap. 1.

**Al-Khayyam**  
Trattato del tipo  $x^3 + bx = c$   
con  $b = p^2$  e  $c = p^2q$  per il principio di omogeneità  
si ottiene per intersezione  
 $mx^2 - r^2 = qx$   
 $xy = r^2/p$   
del punto  
zione delle  
sestate in  
dice cercata.

**Livia Giacardi -2010**  
Al-Khayyam non scrive equazioni, ma usa le proporzioni

Presentare e commentare **passi opportunamente scelti da testi classici della matematica** di varie epoche storiche rilevanti per la storia dell'aritmetica, dell'algebra e della geometria allo scopo di:

- abituare gli allievi alla **comprensione di testi di matematica**
- sviluppare **capacità critiche e dimostrative**
- collegare **lo sviluppo della matematica con le altre discipline**, favorendo così anche la collaborazione con docenti di altre materie.

### Elenco dei testi e degli argomenti

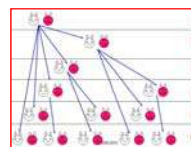
- 1) **Archimede**, *Arenario*, in *Opere*, Classici della Scienza Utet 1974, la scrittura dei grandi numeri, pp. 458-462.
- 2) **Euclide**, *Gli Elementi*, in *Classici della scienza*, Utet, Torino, 1988: VII, principali definizioni, algoritmo di Euclide, infinità numeri primi.
- 3) **Diofanto**, *Les six livres d'arithmétiques et le livre des nombres polygones*, a cura di P. Ver Eecke, 1926, pp. 53-55, 280, 287 segg., terne pitagoriche, numeri poligonali. (Vedi anche Diophantus, *Les Arithmétiques*, a cura di R. Rashed, Paris, 1984 *Diophanti Alexandrini Opera Omnia*, a cura di P. Tannery, Lipsiae 1893)
- 4) **Brahmagupta e Bhaskara**, *Algebra with Arithmetic and mesuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhascara*, translated by H.T. Colebrooke, London 1817, pp. 131-138, il sistema di numerazione decimale posizionale, le operazioni, lo zero, equazioni di secondo grado, dimostrazioni « visive » delle identità notevoli.
- 5) **Al-Kwarizmi**, *Al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabalah* connessioni fra algebra e geometria nella soluzione delle equazioni di secondo grado
- 6) **O. Al-Khayyam**, *L'oeuvre algebrique d'Al-Khayyam, établie, traduite et analysée par R. Rashed e A. Djebbar*, l'uso delle coniche per risolvere le equazioni cubiche
- 7) **Leonardo Pisano**, *Liber Abaci*, in *Testi e studi*, Giardino di Archimede, CD-Rom, 2002, pp. 2-3, 24, il sistema di numerazione decimale posizionale, il problema dei conigli.
- 8) **N. Tartaglia** e i metodi di falsa posizione (transizione dall'aritmetica all'algebra) in *General Trattato*, 1556, Libro XVI e XVII.
- 9) **S. Stevin** e la diffusione delle frazioni decimali. Letture dalla *Disime* (1585). Il concetto di numero nel Cinquecento e Seicento.
- 10) **B. Pascal** e i criteri di divisibilità: *De numeris multiplicibus* in *Oeuvres complètes*, pp. 159-165.
- 11) **B. Pascal**, il triangolo aritmetico, la dimostrazione per induzione in *Traité du triangle Arithmétique* in *Oeuvres complètes*, p. 103.
- 12) **R. Descartes**, *Opere scientifiche (La geometria)*, Utet, Torino, 1983, creazione della geometria analitica, problema della retta tangente
- 13) **C. F. Gauss** e le congruenze, *Disquisitiones Arithmeticae*, Lipsiae 1801, pp. 1-7
- 14) **C.F. Gauss**, *Disquisitiones Arithmeticae*, Lipsiae 1801, Teorema fondamentale dell'aritmetica, pp. 9-10

## Tre esempi

- **Muhammed ibn Musa al-Khwarizmi (780-850) e le equazioni di secondo grado**



- **Leonardo Fibonacci Pisano (ca. 1180-ca.1240) e il “problema dei conigli”**



- **Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e le congruenze**





## Muhammed ibn Musa al-Khwarizmi (780-850)

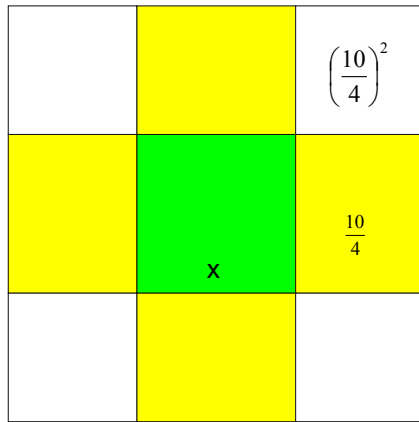
È considerato il padre dell'algebra.  
A lui si deve anche la prima esposizione del sistema di numerazione indiano decimale posizionale e delle operazioni in un'opera che ci è pervenuta solo nella versione latina *Algoritmi de numero indorum*

*Al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabalah''*  
(Breve opera sul calcolo di spostare e raccogliere, 830 circa)

<i>al-jabr</i> (completamento)	$2x^2 + 68 - 10x = 58$ $2x^2 + 68 - 10x + 10x = 58 + 10x$	si eliminano i termini negativi
<i>al-muqabala</i> (bilanciamento)	$2x^2 + 10 = 10x$	si addizionano i termini simili

### Quadrati e radici uguali a numeri

<b>"...un quadrato e 10 radici sono uguali a 39 unità.</b>	Traduzione simbolica	Formalizzazione $x^2 + px = q$
Il modo di risolvere questo tipo di equazione è prendere mezza radice appena menzionata. Adesso, le radici nel problema sono dieci. Quindi prendiamo la metà ossia 5, che moltiplicato per se stesso dà 25, una somma che unita a 39 dà 64. Avendo preso poi la radice quadrata di questo che è 8, sottratto della metà delle radici, 5, diventa 3. Il numero 3 quindi rappresenta una radice di questo quadrato, che è 9 naturalmente. 9 quindi dà il quadrato"	$x^2 + 10x = 39$  $10 : 2 = 5$ $5 \cdot 5 = 25$  $25 + 39 = 64$  $\sqrt{64} = 8$ $8 - 5 = 3$ <span style="border: 1px solid red; border-radius: 50%; padding: 2px;"><math>x = 3</math></span> $x^2 = 9$	$p : 2$ $\frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \left(\frac{p}{2}\right)^2$  $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$ $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$



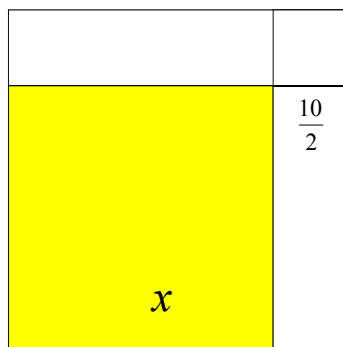
**I Prova geometrica  
Completamento  
del quadrato**

$$x^2 + 10x = 39$$

Costruisce sui lati del quadrato di lato  $x$  quattro rettangoli di base  $10/4$  e per completare la figura occorrono quattro quadratini di lato  $10/4$ :

$$x^2 + 4 \cdot (10/4)x + 4 \cdot (10/4)^2 = x^2 + 10x + 25$$

Sapendo che  $x^2 + 10x = 39$ , il quadrato esterno ha un'area  $39 + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 64$  e il suo lato misura 8. Dalla figura si osserva che il lato è di lunghezza  $\frac{10}{4} + x + \frac{10}{4}$ , quindi  $x + 5 = 8$ , che dà  $x = 3$ .



**II Prova geometrica  
Completamento  
del quadrato**

$$x^2 + 2\left(\frac{10}{2}\right)x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$$

Es. 7

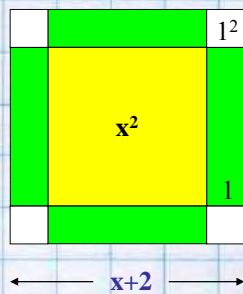
Trovare le soluzioni positive della seguente equazione come fa Al-Khwarizmi

$$x^2 + 4x = 32$$

Suggerimento:

Costruire il quadrato di lato  $x$  e sui suoi lati costruire 4 rettangoli di lato 1.

Completare il quadrato, ...



Dunque

$$x^2 + 4(1)x + 4(1^2) =$$

$$x^2 + 4x + 4$$

ma  $x^2 + 4x$  vale 32

dunque il quadrato esterno ha area  $32+4=36$  e il suo lato

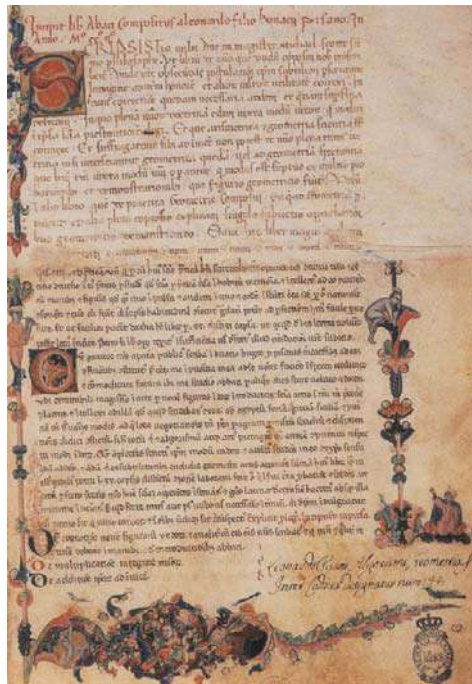
$x+2$  sarà = 6, da cui  $x = 4$

## Connessioni fra algebra, aritmetica e geometria

**Quesito**

**Dimostrare che la media geometrica di due numeri positivi non può mai superare la loro media aritmetica**

[Vailati 1908, p. 487]



Il primo matematico di rilievo in Occidente è **Leonardo Fibonacci Pisano**

(ca. 1180-ca.1240)

che in giovane età imparò la matematica dagli arabi nella città di Bugia, dove il padre notaio curava nella dogana gli interessi dei mercanti, e nei viaggi successivi in Egitto, Siria, Grecia, ...

Il frutto di questi viaggi e di questi studi è il **Liber Abaci** (1202) che è una summa del sapere aritmetico e algebrico del mondo arabo, seguito da altre opere minori per mole, ma altrettanto importanti.

Si compone di 15 capitoli

- i primi 7 capitoli sono dedicati all'introduzione delle **cifre indoarabiche**, alla numerazione decimale posizionale, agli **algoritmi delle operazioni**.
- 4 capitoli sono dedicati **all'aritmetica mercantile**
- vi è poi un capitolo di problemi miscelanei, fra cui problemi di **"matematica ricreativa"**
- il cap. 13 è dedicato al metodo della falsa posizione
- i capitoli 14 e 15 sono dedicati alla teoria delle proporzioni e all'**algebra**.



*Liber Abaci, I numeri di man dritta*

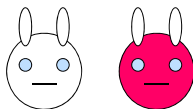
## Il problema dei conigli

parium	1
primus	2
secundus	3
tercius	5
quartus	8
quintus	13
sextus	21
septimus	34
octavus	55
nonus	89
decimus	144
undecimus	233
duodecimus	377

*Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.*

Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinerentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum nativitate germinant. Quia superscriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense geminat; et sic sunt in secundo mense paria 3; ex quibus in uno mense duo pregnantur; et geminantur in tercio mense paria 2 coniculorum; et sic sunt paria 5 in ipso mense; ex quibus in ipso pregnantur paria 3; et sunt in quarto mense paria 8; ex quibus paria 5 geminant alia paria 3: quibus additis cum parijs 3, faciunt paria 13 in quinto mense; ex quibus paria 8, que geminata fuerunt in ipso mense, non concipiunt in ipso mense, sed alia 3 paria pregnantur; et sic sunt in sexto mense paria 21;

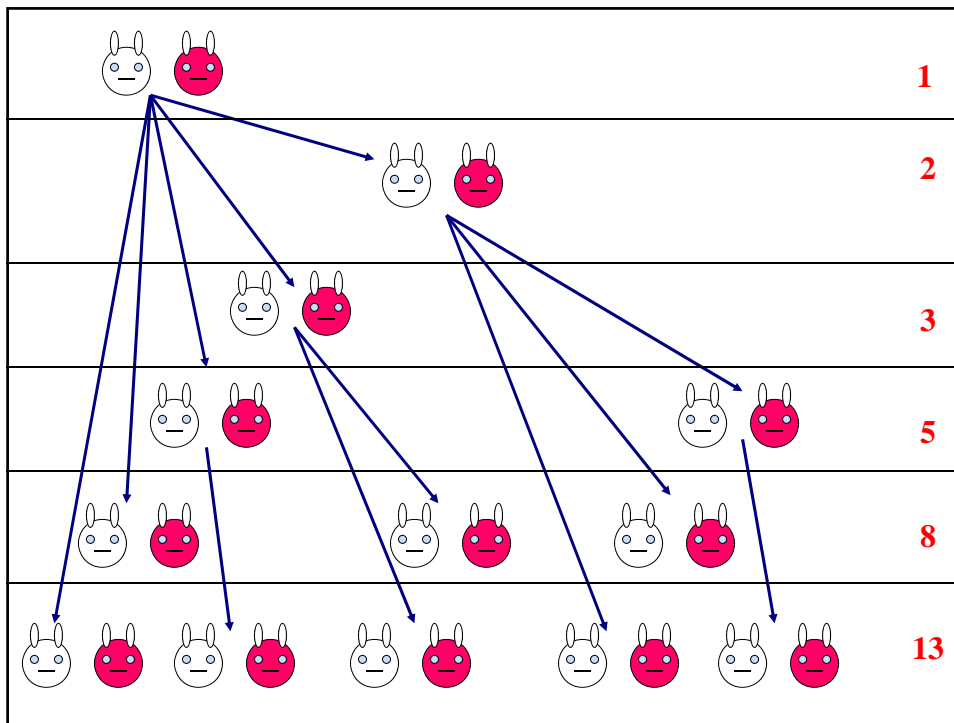
cum quibus additis parijs 13, que geminantur in septimo, erunt in ipso paria 34; cum quibus additis parijs 21, que geminantur in octavo mense, erunt in ipso paria 55; cum quibus additis parijs 34, que geminantur in nono mense, erunt in ipso paria 89; cum quibus additis rursus parijs 55, que geminantur in decimo, erunt in ipso paria 144; cum quibus additis rursus parijs 89, que geminantur in undecimo mense, erunt in ipso paria 233. Cum quibus etiam additis parijs 144, que geminantur in ultimo mense, erunt paria 377; et tot paria peperit superscriptum par in prefato loco in capite unius anni. Potes enim uidere in hac margine, qualiter hoc operati fuimus, scilicet quod iunximus primum numerum cum secundo, uidelicet 1 cum 2; et secundum cum tercio; et tertium cum quarto; et quatum cum quinto, et sic deinceps, donec iunximus decimum cum undecimo, uidelicet 144 cum 233; et habuimus superscriptorum coniculorum summam, uidelicet 377; et sic posses facere per ordinem de infinitis numeris mensibus.



“Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da pareti, per scoprire quante coppie di conigli discendano da questa in un anno. Per natura **ogni coppia di conigli genera in un mese un'altra coppia, e cominciano a procreare a partire dal secondo mese di vita**”.

“Poiché la prima coppia genera nel I mese, i conigli raddoppieranno, e alla fine del mese avremo **2** coppie. Di queste solo una, cioè la prima genererà anche nel II, e quindi alla fine di questo avremo **3** coppie, due delle quali nel III mese genereranno altre due coppie, e così avremo **5** coppie, ...” (*Liber Abaci* p. 283)





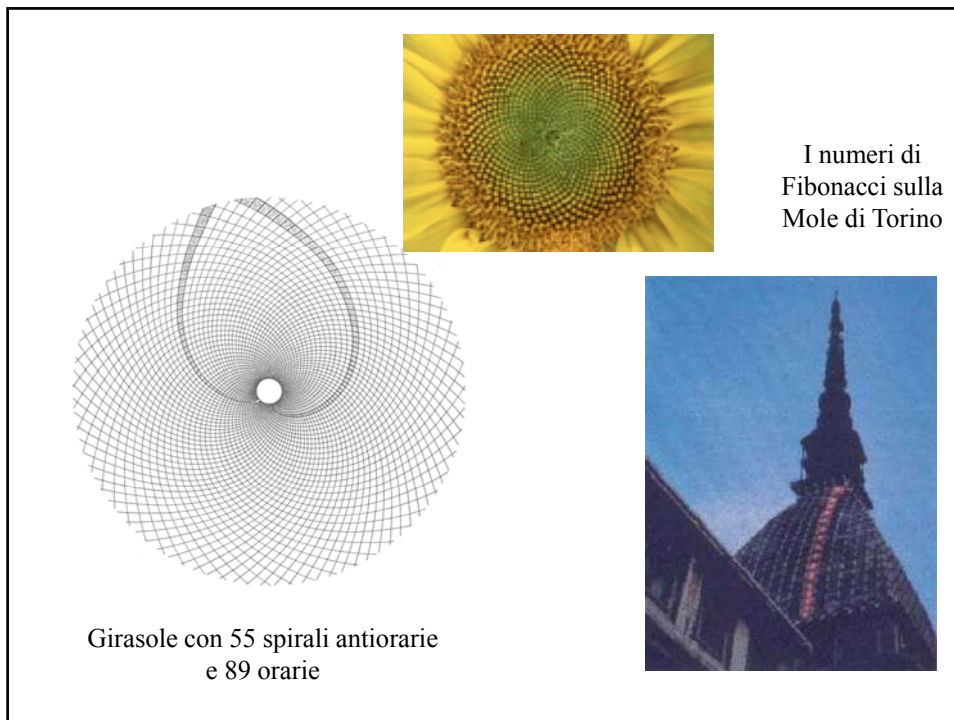
L.P. ottiene al termine dell'anno **377** **coppie** di conigli e osserva che non ha fatto altro che sommare “**il primo numero con il secondo, cioè 1 con 2; poi il secondo con il terzo, il terzo con il quarto,...per trovare la quantità finale di 377 coppie di conigli; è così si può continuare ordinatamente per infiniti mesi successivi**”.



Una pigna con 8 e 13 spirali

**1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., 233, 377,...**  
 **$F_1, F_2, F_3, \dots$**   
**Numeri di Fibonacci  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$**





Girasole con 55 spirali antiorarie e 89 orarie

I numeri di Fibonacci sulla Mole di Torino

**Numeri di Fibonacci  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$**

Dividiamo per  $F_n$  e poniamo  $a_n = F_n / F_{n-1}$ ,  
 si ha: 
$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n},$$

se facciamo crescere  $n$ , i valori di  $a_n$  e  $a_{n+1}$  si avvicinano sempre di più ad uno stesso valore  $\gamma$  che verifica la relazione

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma^2 - \gamma - 1 = 0, \text{ la cui soluzione}$$

positiva è 
$$\gamma = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Si tratta del **rapporto aureo** che nasce dal problema geometrico di tagliare un segmento AB in due parti AC e CB tali che  $AB : AC = AC : CB$

## Alcune proprietà dei Numeri di Fibonacci

- ◆ Il quadrato di un numero  $F$  differisce di 1 dal prodotto del numero che lo precede con quello che lo segue. Il segno della differenza è alternatamente positivo o negativo al procedere della successione.

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

- ◆ Per la somma dei quadrati di due numeri  $F$  successivi vale:  $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$   
Poiché l'indice  $2n+1$  è dispari, ne segue che, scritta la successione dei quadrati dei numeri di Fibonacci, le somme delle coppie dei quadrati successivi forniscono la successione dei numeri  $F$  di indice dispari.

- ◆ Ciascun terzo numero  $F$  è divisibile per 2, ciascun quarto per 3, ciascun quinto per 5, ciascun sesto per 8 e così via, e i divisori costituiscono di nuovo la successione di Fibonacci.

n	F <sub>n</sub>
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
16	987
17	1 597
18	2 584
19	4 181
20	6 765
21	10 946
22	17 711
23	28 657
24	46 368
25	75 025
26	121 393
27	196 418
28	317 811



## Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

*Disquisitiones Arithmeticae* 1801

- ◆ Il Teorema fondamentale dell'aritmetica
- ◆ Le congruenze

C. F. Gauss, *Werke*, 12 voll. Gottinga 1863-1933 (voll. I e II teoria dei numeri)  
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k994003.r=Gauss+Disquisitiones+Arithmeticae.langFR>

## La definizione

1. Se un numero  $a$  divide la differenza dei numeri  $b$  e  $c$ ,  $b$  e  $c$  sono detti *congrui* secondo  $a$ , altrimenti *incongrui*.  $a$  si chiamerà il modulo; ciascuno dei numeri  $b$  e  $c$ , *residuo* dell'altro nel primo caso, e *non residuo* nel secondo. I numeri devono essere presi positivi o negativi, ma interi. Quanto al modulo esso deve essere preso assolutamente, cioè senza alcun segno. Così  $-9$  e  $+6$  sono *congrui* rispetto al modulo 5;  $-7$  è *residuo* di 15 rispetto al modulo 11, e *non residuo* rispetto al modulo 3.

$$b \equiv c \pmod{a} \quad \begin{array}{l} a \text{ divide } b - c \\ b = ka + c \\ c \text{ è il resto della divisione } b : a \end{array}$$

$$15 \equiv -7 \pmod{11}$$

## Il simbolo

**Numerorum congruentiam hoc signo,  $\equiv$ , in posterum denotabimus, modulum ubi opus erit in clausulis adiungentes,  $-16 \equiv 9 \pmod{5}$ ,  $-7 \equiv 15 \pmod{11}$  \*).**

**\*) Hoc signum propter magnam analogiam quae inter aequalitatem atque congruentiam inuenitur adoptauimus.**

*“D’ora in poi denoteremo la congruenza tra numeri con questo simbolo  $\equiv$  aggiungendo tra parentesi il modulo, quando necessario,  $-16 \equiv 9 \pmod{5}$ ,  $-7 \equiv 15 \pmod{11}$ .”\**

*\* Abbiamo adottato questo simbolo per la grande analogia tra uguaglianza e congruenza.*

### Proprietà transitiva

*Si plures numeri eidem numero secundum eundem modulum sunt congrui, inter se erunt congrui (secundum eundem modulum).*

*“se più numeri sono congrui ad uno stesso (numero) secondo lo stesso modulo, essi saranno congrui tra loro (sempre secondo lo stesso modulo)”*

$$a \equiv b(\text{mod } m) \text{ e } c \equiv b(\text{mod } m) \rightarrow a \equiv c(\text{mod } m)''$$

**Dim.**  $a \equiv b(\text{mod } m) \rightarrow a = b + km$

$$c \equiv b(\text{mod } m) \rightarrow c = b + lm$$

Allora  $b = c - lm$ ,

sostituendo otteniamo  $a = c - lm + km = c + (k - l)m$ .

Quindi  $a = c + k'm$ , perché  $k$  e  $l$  sono entrambi interi.

**Esercizio: dimostrare le proprietà riflessiva e simmetrica**

### Teorema

*Qui numeri secundum modulum compositum sunt congrui, etiam secundum quemvis eius divisorem congrui.*

*I numeri che sono congrui secondo un modulo composto, lo sono ugualmente secondo uno qualunque dei suoi divisori.*

$$a \equiv b(\text{mod } m \cdot n) \rightarrow a \equiv b(\text{mod } m) \text{ e } a \equiv b(\text{mod } n)$$

**Esercizio: dimostrare sfruttando la definizione di congruenza**

**Quesito: vale la doppia implicazione?**

## Applicazioni

12. Molti dei teoremi che si ha l'abitudine di esporre nei trattati d'aritmetica, poggiano su questi che abbiamo presentato; per esempio, la regola per riconoscere se un numero è divisibile per 9, 11, o per ogni altro numero. Secondo il modulo 9 tutte le potenze di 10 sono congrue all'unità; dunque se il numero è della forma  $a + 10b + 100c + 1000d + \text{etc.}$ , esso avrà, secondo il modulo 9, lo stesso residuo *minimo* che  $a + b + c + \text{etc.}$ . È chiaro, dopo questo, che se si sommano le figure del numero, senza aver riguardo del posto che esse occupano, la somma che si otterrà e il numero proposto avranno gli stessi residui *minimi*; se dunque quest'ultimo è divisibile per 9, lo sarà anche la somma delle cifre, e solamente in questo caso. E la stes-

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \dots a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

$$\text{con } 0 < a_i < 9$$

$$\forall a_i \quad a_i 10^i \equiv a_i r_i \pmod{A} \quad \text{dunque}$$

$$N \equiv a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \dots a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0 \pmod{A}$$

**Quesiti: Spiegare il criterio di divisibilità per 9**

**Trovare il criterio di divisibilità per 11 e 7 (B. Pascal 1654)**

## Raccolte di Fonti

- C. F. MANARA, G. LUCCHINI, *Momenti del pensiero matematico*, Milano, Mursia, 1976
- U. BOTTAZZINI, P. FREGUGLIA, L. TOTI RIGATELLI, *Fonti per la storia della matematica*, Firenze, Sansoni, 1992
- D. J. STRUIK 1986, *A source book in Mathematics 1200-1800*, Princeton University Press, 1986
- J. FAUVEL, J. GRAY, *The History of Mathematics. A reader*, The Open University, 1987
- AA. VV., *Les mathématiques au fil des ages*, Paris, Gauthier-Villars, 1987
- I. GRATTAN-GUINNESS (editor), *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, Amsterdam, Elsevier, 2005

## Opere Originali dei vari autori

## **Progetto Lauree Scientifiche 2005-06 Laboratorio di "Storia delle matematiche"**

coordinato da Livia Giacardi e Clara Silvia Roero,  
Dipartimento di Matematica, Università di Torino

### **Elenco delle scuole e degli insegnanti che hanno effettivamente partecipato al laboratorio di "Storia delle matematiche"**

**Liceo Classico Statale "Vittorio Alfieri" corso Dante, 80 - 10126 Torino**  
**Presidenza +39-011-6963419, Segreteria +39-011-6631941, Fax +39-011-6634042,**  
**segreteria.LC.ALFIERI.TORINO@scuole.piemonte.it**  
**<http://www.scuole.piemonte.it/torino/alfieri/lc/>**

**Numero totale di classi: 47, di docenti: 78, di docenti di matematica: 7, di studenti: 1046**

**Maria Luisa Albonico**, classe concorsuale A 049 Matematica e Fisica

Classe IV ginnasio delta, 20 studenti

**Adele Penta**, classe concorsuale A 049 Matematica e Fisica

Classe IV ginnasio gamma, 23 studenti

*Tem: Sistemi di numerazione e tecniche di calcolo nel mondo antico*

*Aritmetica e geometria da Talete a Euclide: dalle dimostrazioni "visive" a quelle deduttive*

Riferimento: penta.adele@libero.it, marialuisaalbonico@hotmail.com

Collaborano alla sperimentazione anche gli insegnanti di storia Antonietta Panza e Ermanno Malaspina.

**Liceo Classico G. Govone Via Teobaldo Calissano, 8 - 12051 ALBA (CN)**

**Tel. e Fax: +39 173 44 01 52, liceo.govone@areacom.it**

**<http://www.classico-govone.it/index.asp>**

**Numero totale di classi: 14 (3 IV ginnasio, 4 V ginnasio, 2 I liceo, 2 II liceo e 3 III liceo ), di  
docenti di matematica: 4, di studenti: 324.**

**L'istituto comprende anche il Liceo Artistico " Pinot Gallizio ". Le classi del Liceo artistico  
sono 11, i ragazzi 220 e gli insegnanti di matematica 3.**

**Margherita Bergesio**, classe concorsuale A 049 Matematica e Fisica

Classe I, 23 studenti (studenti coinvolti 11)

*Tema: L'infinito nella storia della matematica, I*

Riferimento: bergesiomargherita@libero.it

**Liceo Classico Paritario "San Paolo" piazza Vittorio Veneto 1 - 12051 Alba (CN)**

**Tel. 0173 33928 Fax 0173 441499 - liceo.sanpaolo@areacom.it**


**Numero totale di classi: 5, di docenti: 16, di docenti di matematica: 2, di studenti: 57**

**Sara Trucco**, classe concorsuale A 049 Matematica e Fisica

Classe II liceo, 18 studenti

*Tema: L'infinito nella storia della matematica, II*

Riferimento: saratrucco@yahoo.it



**Progetto Lauree Scientifiche  
2006-2009**

# **Storia delle matematiche**

**Livia Giacardi**

**Dipartimento di Matematica, Università di Torino**



# Scopi

presentare alcuni argomenti di storia della matematica collegati con i temi affrontati nel programma scolastico al fine,

- di illustrare su esempi opportunamente scelti, o attraverso letture mirate, **la maturazione di concetti, metodi e tecniche** in modo da mostrare la genesi storica delle teorie matematiche studiate, collocandole in un contesto culturale più ampio.
- di **creare attività didattiche coerenti** con lo svolgimento del programma e che arricchiscono la cultura generale.
- avviare i ragazzi alla **lettura di testi matematici classici**

La storia permette, infatti, all'allievo di rendersi conto che la matematica non è una scienza statica, ma nasce e si sviluppa per risolvere problemi sia teorici che pratici e gli consente di stabilire **collegamenti interdisciplinari** con le altre scienze, con la filosofia, con l'arte,... evidenziando il **carattere unitario del sapere**.

Laboratori già sperimentati nelle scuole:

- **Sistemi di numerazione e tecniche di calcolo nel mondo antico**
- **Aritmetica e geometria da Talete a Euclide: dalle dimostrazioni “visive” a quelle deduttive**
- **Storia dell'algebra 1. Le equazioni di I e di II grado**

Laboratori nuovi:

- **Le origini della geometria analitica**
- **Storia della trigonometria: dai calcoli mediante l'ombra alle funzioni circolari**

# Modalità di svolgimento

- **Attività preparatoria** svolta dall'insegnante (lettura di testi scelti, esercizi, ecc.)
- Le **lezioni di storia della matematica** sono state preparate in Power Point in modo da lasciare una traccia del lavoro sia agli studenti che agli insegnanti.
- **storia “narrata”** - **storia “per problemi”** - attività didattiche e esercizi proposti a partire dalla trattazione storica (evidenziati nel Power Point con pagine a quadretti) - **sudditi didattici**
- **lezione “dialogata”**. Questo ha stimolato una vera e propria gara fra i ragazzi incentivati a rispondere per primi ai vari quesiti, rivelando in alcuni casi notevoli doti di intuizione in studenti “scolasticamente” giudicati modesti.
- **attività di consolidamento** da parte dell'insegnante della classe accompagnata spesso da letture di passi opportunamente scelti dai testi presi in esame.

# Sistemi di numerazione e tecniche di calcolo nel mondo antico

4 ore + consolidamento



Scrivi in notazione binaria i seguenti esagrammi di Fu-hi e converti in base 10

	$1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
	$1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1$
	$32 + 8 + 4 + 1 = 45$
	$1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
	$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$
	$32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$

101101<sub>2</sub>

22	2				
22	11	2			
0	10	5	2		
	1	4	2	2	
		1	2	1	
			0		

10110<sub>2</sub>

Numeri e tecniche di calcolo nella Terra fra i due fiumi

I numeri nei bassorilievi

2500 a. C.

		11.110
		121.200
		46

L'origine dei segni numerici e le "bullae" di argilla con gettoni

Le bullae molto probabilmente servivano nelle transazioni commerciali. I gettoni contenuti descrivevano la merce inviata. Rompendo la bolla l'acquirente poteva verificare se la merce corrispondeva. Successivamente si iniziò ad imprimere sulla superficie della bolla i vari gettoni

Bulla con gettoni, Susa, ca 3300 a. C., Louvre

4 mucche  
70 montoni

Bassa Mesopotamia, 3100 a. C.

Passaggio dai gettoni ai simboli numerici

## **All'origine del concetto di numero**

- dalla pratica dell'intaglio al concetto di base
- basi utilizzate e loro origine (2, 5, 10, 20, 60, ...)
- sistemi di numerazione additivi e sistemi posizionali
- la scoperta dello zero in India e sua importanza
- il sistema binario di Fohi
- il sistema vigesimale dei Maia
- l'uso dell'abaco e il sistema di posizione, scrittura di un numero in base qualunque con l'uso dell'abaco

## **I sistemi di numerazione egizio e babilonese**

- il sistema decimale additivo egizio, addizione, moltiplicazione e divisione, le frazioni a numeratore 1
- il sistema di numerazione babilonese sessagesimale posizionale  
la mancanza dello zero e inconvenienti che ne derivano
- calcolo degli inversi
- numeri che non ammettono inverso

# Finalità

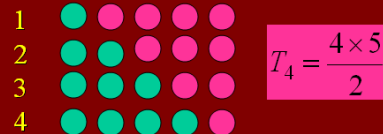
- presentare **diversi sistemi di numerazione** del mondo antico e le varie tecniche di calcolo,
- evidenziare **i caratteri e i vantaggi dei sistemi posizionali rispetto a quelli additivi,**
- riflettere sul **concetto di base** di un sistema di numerazione, sull'importanza e sul **ruolo dello zero**
- stimolare gli studenti a guardare alle civiltà del passato anche sotto l'aspetto del sapere scientifico.

# Aritmetica e geometria da Talete a Euclide: dalle dimostrazioni "visive" a quelle deduttive

La nascita della matematica come scienza dimostrativa

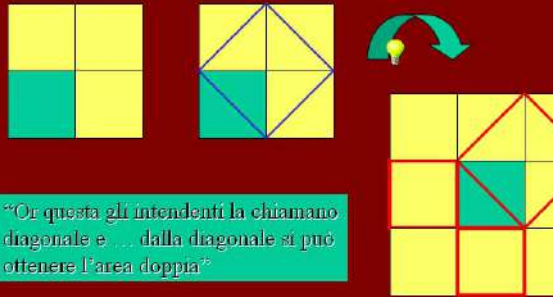
Livia Giacardi - Liceo Cl

Consideriamo il numero triangolare  $T_4$ , la tetractys,  $1+2+3+4 = 10$



Platone, *Menone*

Problema: costruire un quadrato di area doppia di quello assegnato



colarlo: one anziché 4 addizioni. icolare il generico  $T_n$ , e imi n numeri naturali

Euclide (300 a.C.)  
Alessandria

Gli *Elementi* sono la sua opera fondamentale

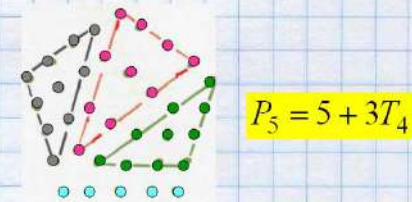
Due criteri {  
- uno extralogico dell'evidenza  
- uno puramente logico della dimostrazione

A partire da alcune proprietà primitive la cui intelligenze garantite dall'evidenza, si ricavano deduttivamente le proposizioni

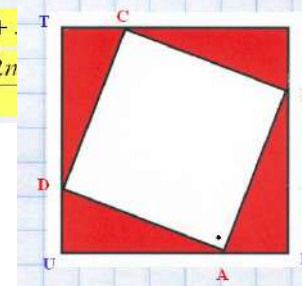
metodo assiomatico deduttivo

Gli *Elementi di Euclide*, Classici della scienza, Utet, T

Trovare la formula che esprime l'n-esimo numero pentagonale osservando la figura



$P_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + n + 3 \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n^2 - n}{2}$



Occorre dimostrare che ABCD è un quadrato

Hp) I triangoli "rossi" sono rettangoli e uguali fra loro  
RSTU è un quadrato con lato = alla somma dei cateti del triangolo "rosso"  
Th) ABCD è un quadrato.

$\widehat{AR} + \widehat{DAU} = 180^\circ$   
90°

i postulati individuano un sistema di proprietà primitive "evidenti di per sé" e di operazioni possibili partendo dalle quali il geometra possa con il solo ragionamento logico ricavare tutto l'edificio della geometria.

Postulati (*aitēmata*)

- I. Si può tracciare una retta da un punto qualsiasi a un punto qualsiasi
- II. Si può prolungare indefinitamente una retta finita
- III. Si può descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi



Traducono in termini geometrici le operazioni pratiche degli arpedonaphi egizi:

- tendere una corda tra due punti
- tracciare un cerchio usando una corda fissata ad un paletto infisso nel terreno

Euclide parla di cerchi e di rette e ciò equivale a dire che i soli strumenti ammessi sono la riga e il compasso

4 ore + consolidamento

- Le “ricette” di calcolo presso gli Egizi e i Babilonesi. **Pensiero operativo-concreto.**
- **Talete** (VII-VI sec. a. C.) e le prime “dimostrazioni” di affermazioni di carattere generale (lettura di frammenti su Talete)
- i **Pitagorici** (VI sec. a. C.) e l’**aritmo geometria**
- il **teorema di Pitagora**: una “dimostrazione visiva”
- generalizzazione del teorema di Pitagora
- gli annodatori di corde egizi e l’inverso del teorema di Pitagora
- i Pitagorici e la **scoperta delle grandezze incommensurabili**
- incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato: lettura di un passo dal *Menone* di Platone, [dimostrazione per assurdo basata sul pari e sul dispari]
- la dimostrazione in senso euclideo: **Euclide e gli *Elementi*** e loro carattere assiomatico-deduttivo, i postulati e la traduzione dei procedimenti empirici della tradizione nelle operazioni astratte della geometria. Riga e compasso strumenti privilegiati. Il postulato delle parallele. I teoremi, esempi di dimostrazione.

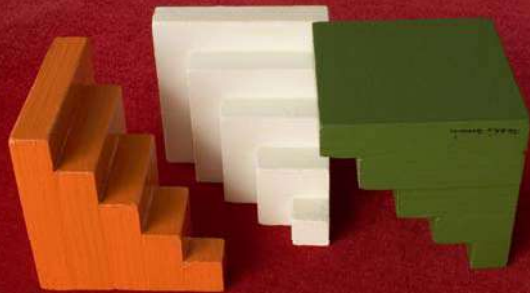


# Finalità

- riflettere su **che cosa significa dimostrare**, sul rapporto fra evidenza visiva e dimostrazione;
- riflettere su **che cosa significa risolvere un problema, importanza degli strumenti scelti**;
- stimolare alla **scoperta**
- inquadrare lo studio della matematica in un più **ampio contesto culturale**

# Sussidi didattici

Numeri figurati



Somma dei quadrati  
dei primi  $n$  numeri  
naturali



Abachi e cambiamenti di base

# Storia dell'algebra 1.

## Le equazioni di I e di II grado

4 ore + consolidamento

**STORIA DELL'ALGEBRA 1**  
**Le equazioni di 1° di 2° grado**

Livia Giacardi - Maggio 2007

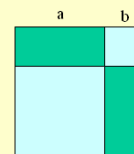
Traduzione	Interpretazione
Ho addizionato la superficie e il lato del mio quadrato: 0;45	$x^2+x=3/4$ (0;45 = 45/60)
Tu porrai 1 l'unità	$1=60/60$
Tu dividerai in due l'unità: 0;30	$1/2=30/60$
Tu moltiplicherai 0;30 e 0;30	$(1/2)^2=1/4=0;15$
Tu aggunderai 0;15 a 0;45	$3/4+1/4=1$
1 è il quadrato di 1	$(x+1/2)^2=1$
0;30 che tu hai moltiplicato, lo sottra da 1	
0;30 è il lato del quadrato	$x = \sqrt{1/4}$

### Elementi, Libro II

dimostrazione geometrica rigorosa delle identità usate dai Babilonesi

#### Prop. II. 4

"Se si divide a caso una linea retta, il quadrato di tutta la retta è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti". [p. 163]



$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

### Evoluzione del simbolismo

**Diofanto** (III sec. d. C.)  
 $\xi \iota \sqrt{\cdot} M^{\circ} \eta \iota (\sigma\sigma\zeta) \Delta' \alpha M^{\circ} \alpha$

$\xi$  è l'incognita  $x$  (*arithmos*)  
 $\Delta^2$  è  $x^2$ , dove  $\Delta$  è l'iniziale di *dianauis*, potenza

$$10x - 8 = x^2 + 1$$

#### Indiani

$y\hat{a}$  va 0  $y\hat{a}$  10  $l\hat{u}$  8  
 $y\hat{a}$  va 1  $y\hat{a}$  0  $l\hat{u}$  1

$$x^2 \cdot 0 + x \cdot 10 - 8$$

$$x^2 \cdot 1 + x \cdot 0 + 1$$

$y\hat{a}$  (*yavat-tavat* = *ta*)  
 $y\hat{a}$  va (*yavat-vargo*)  
 $m\hat{u}$  (*nipa* = *ciò che ap*)

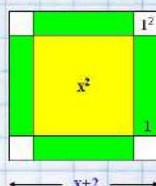
Es. 7 Trovare le soluzioni positive della seguente equazione come fa Al-Khwarizmi

$$x^2 + 4x = 32$$

Suggerimento:

Costruire il quadrato di lato  $x$  e sui suoi lati costruire 4 di lato 1.

Completare il quadrato, ...



Dunque

$$x^2 + 4(1)x + 4(1^2) =$$

$$x^2 + 4x + 4$$

ma  $x^2 + 4x$  vale 32

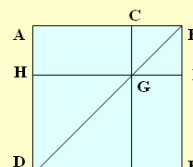
dunque il quadrato esterno ha area  $32+4=36$  e il suo lato

$$x+2 \text{ sarà } = 6, \text{ da cui } x = 4$$

### Lemma 1, BM 13901 metodo del completamento del quadrato

$$x^2 +$$

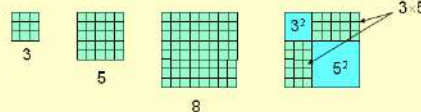
$$x^2 +$$



$\hat{C}\hat{G}\hat{B} = \hat{A}\hat{D}\hat{B}$  (corrispondenti)  $= \hat{A}\hat{B}\hat{D} = \hat{G}\hat{B}\hat{C}$   
 dunque  $\hat{C}\hat{G}\hat{B} = \hat{G}\hat{B}\hat{C} \rightarrow BC = CG$   
 ma  $BC = GK$  e  $CG = BK \rightarrow GK = BK$   
 per cui il parallelogramma  $CBKG$  ha tutti i lati uguali. Dico che gli angoli sono retti. 39

### Bhaskara II, *Bijaganita* (1150)

"Regola: la somma dei quadrati di due quantità differisce dal quadrato della loro somma di due volte il loro prodotto"  
 Per esempio, siano le quantità 3 e 5. I loro quadrati sono 9 e 25. Il quadrato della loro somma, 64. Guarda:



Qui le celle quadrate sono chiaramente eguali a due volte il prodotto; e la proposizione è dimostrata"

$$(x+y)^2 - (x^2+y^2) = 2xy$$

[Colebrooks? p. 224]

### Nel mondo islamico



La civiltà islamica si sviluppa a partire dal 622 (anno della fuga di Maometto a Medina) e raggiunge il massimo splendore tra il IX e il XIII sec.

- **Cronologia**: i momenti più significativi della storia dell'algebra e i protagonisti dai Babilonesi a Galois.

- **Evoluzione del simbolismo**

- i **calcoli aha egizi** (metodo di semplice falsa posizione)

- il **“calcolo algebrico” dei Babilonesi** (uso delle identità notevoli, il metodo del completamento del quadrato e quello della semisomma e semidifferenza)

- problemi di applicazione delle aree in Grecia

- la dimostrazione geometrica rigorosa delle identità notevoli negli

**Elementi di Euclide**. Lettura guidata di alcune proposizioni.

- **Diofanto**, il recupero della tradizione babilonese e i primi passi verso il simbolismo algebrico

- **i matematici indiani e l'uso dei numeri negativi**

- **i contributi del mondo islamico**. Al Kwarizmi (IX sec.): diffusione del sistema di numerazione indiano con lo zero, classificazione, risoluzione e discussione delle equazioni di secondo grado

- il *Liber Abaci* (1202) di **Leonardo Pisano**: un ponte fra Oriente e Occidente

# Finalità

- individuare la **transizione dai metodi aritmetici** (falsa posizione) a **quelli algebrici**,
- riflettere sull'**importanza del simbolismo**,
- evidenziare l'**importanza dell'ampliamento del campo numerico**,
- illustrare l'**uso della geometria** per introdurre i prodotti notevoli e per risolvere equazioni di secondo grado,



LA  
G E O M E T R I E.  
LIVRE PREMIER.  
**Le origini della**

Des problemes qu'on peut  
**Geometria**  
lignes dro



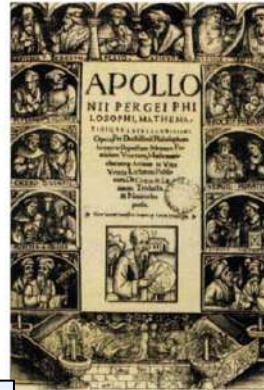
Ous les Probl  
peuvent facilem  
qu'il n'est befoin  
lire la longueur d  
pour les coustru

Livia Giacardi, 201

**Apollonio di Perga**  
(circa 262-190 a. C.)

La sua vita trascorse fra **Alessandria**, dove ricevette la sua educazione scientifica, e **Pergamo** dove c'erano importanti centri di studi superiori e ricche biblioteche.

Le sue doti di matematico erano così notevoli che era chiamato "il grande geometra".

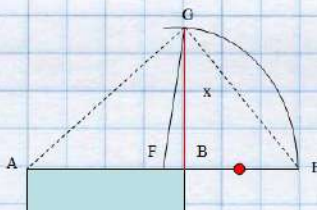


P. Ver Eecke, *Les Coniques*

# Le origini della geometria analitica

**Uso dell'applicazione delle aree per "risolvere" un'equazione quadratica pura**

Trovare un quadrato la cui area sia uguale a quella di un rettangolo ABCD



Si prolunghi AB di un segmento  
Si prenda il punto medio F di  
il cerchio di centro F e raggio  
Sia G il punto di intersezione  
prolungamento del lato BE da  
dato con la circonferenza, allo  
segmento cercato.

Infatti il triangolo AGE è

LA  
G E O M E T R I E.  
LIVRE PREMIER.

Des problemes qu'on peut construire sans  
y employer que des cercles & des  
lignes droites.



Ous les Problemes de Geometrie se  
peuvent facilement reduire a tels termes,  
qu'il n'est befoin par après que de connoi-  
tre la longueur de quelques lignes droites,  
pour les coustruire.

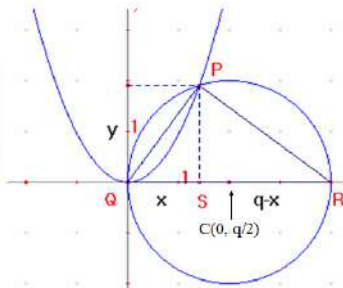
Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que  
de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la  
Soustraction, la Multiplication, la Division, & l'Extra-  
ction des racines, qu'on peut prendre pour une espece  
de Division: Ainsi n'aton autre chose a faire en Geo-  
metrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les pre-  
parer a estre connus, que leur en adiouster d'autres, ou  
enotter, Oubien en ayant vne, que se nommeray l'vnité  
pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui  
peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant  
encore deux autres, en trouver vne quatriesme, qui soit  
à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est  
le mesme que la Multiplication, ou bien en trouver vne  
quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité



**La creazione della geometria analitica**



L'equazione trinomia del I tipo  $x^3 + bx = c$ ,  
("un cubo più lati sono uguali a un numero") viene scritta come  
 $x^3 + p^2x = p^2q$  con  $b = p^2$  e  $c = p^2q$  per il principio di omogeneità  
dimensionale.  
La risoluzione si ottiene per intersezione  
della circonferenza  $x^2 + y^2 = qx$   
e della parabola  $y = x^2/p$ .



L'ascissa QS del punto P di intersezione delle curve rappresentate in figura è la radice cercata.

Al-Khayyam non scrive equazioni, ma usa le proporzioni

$y = x^3$  in P(1,1) con il metodo di

$y = 1/x$  in P(2,1/2) con il metodo

$$(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d) -$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$(x-c)^2 + \frac{1}{x^2} = s^2$$

$$c = \frac{15}{8}$$

- breve storia della geometria analitica con attenzione ai momenti più significativi per lo sviluppo dei metodi e dei concetti che ad essa competono:

© introduzione di un **sistema di riferimento e uso delle coordinate**,

© elaborazione del **simbolismo**,

© emergenza del **legame curva-equazione**, ecc.),

© attenzione ai **collegamenti** con l'evoluzione storica di altri settori della matematica quali l'algebra e l'analisi infinitesimale

- Apollonio, le *Coniche* e l'uso delle coordinate

- O. Al Khayyam e l'uso delle coniche per risolvere le equazioni cubiche

- N. Oresme e lo studio del moto attraverso i diagrammi

- R. Descartes, la *Géométrie* e la creazione della geometria analitica

- P. Fermat e un altro approccio alla geometria analitica

- Il costituirsi della moderna geometria analitica

# Materiali prodotti

Relativamente ai primi due moduli è stato realizzato un dossier contenente:

- un CD-Rom con i file delle lezioni in Power Point e in formato stampabile;
- copie di articoli di storia della matematica di riferimento; indicazioni bibliografiche essenziali sia relative alla parte storica (fonti primarie e secondarie), sia per la scelta di attività didattiche mirate;
- indicazione di siti web utili e affidabili;
- copia delle prove di verifica.



# Storia della trigonometria

Dai calcoli mediante l'ombra alle funzioni circolari





**Progetto Lauree Scientifiche  
2010-2011**

# **Storia delle matematiche**

**Livia Giacardi, Erika Luciano, C. Silvia Roero  
Dipartimento di Matematica, Università di Torino**

Nella **Bozza delle Indicazioni Ministeriali** relative ai nuovi programmi (marzo 2010), si evidenzia l'importanza di *“connettere le varie teorie matematiche studiate con le problematiche storiche che le hanno originate e di approfondirne il significato”*.

Con l'introduzione della storia della matematica nell'insegnamento, *“lo studente dovrà acquisire una consapevolezza critica dei rapporti tra lo sviluppo del pensiero matematico e il contesto storico, filosofico, scientifico e tecnologico...”*

## Scopi generali

presentare alcuni argomenti di storia della matematica collegati con i temi affrontati nel programma scolastico al fine,

- di illustrare su **esempi e problemi, letture** opportunamente scelti, **la maturazione di concetti, metodi e tecniche** in modo da mostrare la **genesi storica** delle teorie matematiche studiate, collocandole in un contesto culturale più ampio.
- di **creare attività didattiche coerenti** con lo svolgimento del programma e che arricchiscono la cultura generale.
- avviare i ragazzi alla **lettura di testi matematici classici**

## Metodologia

storia “per problemi”, storia “narrata” , attività didattiche e quesiti creati a partire dalla trattazione storica

### Livia Giacardi

Laboratori nuovi o non ancora sperimentati:

- **Le origini della geometria analitica**
- **Lecture matematiche**

Laboratori già sperimentati nelle scuole e disponibili:

- **Sistemi di numerazione e tecniche di calcolo nel mondo antico**
- **Aritmetica e geometria da Talete a Euclide: dalle dimostrazioni “visive” a quelle deduttive**
- **Storia dell'algebra 1. Le equazioni di I e di II grado**

## I CD-Rom



**Erika Luciano, C. Silvia Roero**



**Le origini della Geometria**

**Apollonio di Perga (circa 262-190 a. C.)**

La sua vita trascorse fra **Alessandria**, dove ricevette la sua educazione scientifica, e **Pergamo** dove c'erano importanti centri di studi superiori e ricche biblioteche. Le sue doti di matematico erano così notevoli che era chiamato "il grande geometra".

# Le origini della geometria analitica



**Uso dell'applicazione delle aree per "risolvere" un'equazione quadratica pura**

Trovare un quadrato la cui area sia uguale a quella di un rettangolo ABCD.

Si prolunga AB di un segmento BE tale che il rettangolo ABCE sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga BE di un segmento EF tale che il rettangolo BEFG sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga EF di un segmento FG tale che il rettangolo EFGH sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga GH di un segmento HI tale che il rettangolo GHJK sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga JK di un segmento KL tale che il rettangolo JKLM sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga LM di un segmento LN tale che il rettangolo LMOP sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga OP di un segmento PQ tale che il rettangolo PQRS sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga QR di un segmento RQ tale che il rettangolo RQST sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga ST di un segmento TS tale che il rettangolo STUV sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga UV di un segmento UV tale che il rettangolo UVWX sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga VW di un segmento VW tale che il rettangolo VWXY sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga WX di un segmento WX tale che il rettangolo WXYZ sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga XY di un segmento XY tale che il rettangolo XYZA sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga ZA di un segmento ZA tale che il rettangolo ZABC sia uguale in area al rettangolo ABCD. Si prolunga AB di un segmento AB tale che il rettangolo ABCD sia uguale in area al rettangolo ABCD.



**La creazione della geometria analitica**

René Descartes (1596-1650) è considerato il fondatore della geometria analitica. La sua opera "Géométrie" (1637) introduce il sistema di coordinate cartesiane, che permette di rappresentare le figure geometriche in termini di equazioni algebriche e viceversa.



L'equazione tetramica del I tipo  $x^4 + bx^2 + c = 0$  ("un certo più lati sono uguali a un numero") viene scritta come  $x^4 + px^2 + q = 0$  con  $b = p^2$  e  $c = -p^2q$  per il principio di omogeneità dimensionale. La risoluzione si ottiene per la trisezione della circonferenza  $x^2 - y^2 = qx$  e della parabola  $y = x^2/4p$ .

L'ascissa QS del punto P di intersezione delle curve rappresentate in figura è la radice cercata.

Al-Khwarizmi non scrive equazioni, ma usa le proporzioni



La creazione della geometria analitica

La geometria analitica nasce dalla fusione di geometria e algebra. Descartes introduce il sistema di coordinate cartesiane, che permette di rappresentare le figure geometriche in termini di equazioni algebriche e viceversa.

Livia Giacardi

- Apollonio, le *Coniche* e l'uso delle coordinate
  - O. Al Khayyam e l'uso delle coniche per risolvere le equazioni cubiche
  - N. Oresme e lo studio del moto attraverso i diagrammi
  - R. Descartes, la *Géométrie* e la creazione della geometria analitica
  - P. Fermat e un altro approccio alla geometria analitica
  - Il costituirsi della moderna geometria analitica
- introduzione di un **sistema di riferimento e uso delle coordinate**,
  - elaborazione del **simbolismo**,
  - emergenza del **legame curva-equazione**, ecc.,
  - attenzione ai **collegamenti** con l'evoluzione storica di altri settori della matematica quali l'algebra e l'analisi infinitesimale

# Lecture matematiche Pagine di matematica per la scuola

**C.F. GAUSS (1777-1855)**  
*Disquisitiones Arithmeticae*, 1801, pp. 9-10

**Niccolò Fontana detto Tartaglia (1499-1557)**  
Generali Trattato, 1556  
**Semplice falsa posizione**  
*Della prima parte uero flosce Helocorum d. Simplicis falsae positione*, Cap. 1.

**Al-Khayyam**  
transmissione del tipo  $x^3 + bx = cx^2$   
con  $b = p^2$  e  $c = p^2/q$  per il principio di omogeneità  
il ottimo per intersezione  
tra  $x^2 = y^2 = q x$   
 $xy = p^2$

Al-Khayyam non scrive equazioni, ma usa le proporzioni

Livia Giacardi

Presentare e commentare **passi opportunamente scelti da testi classici della matematica** di varie epoche storiche rilevanti per la storia dell'aritmetica, dell'algebra e della geometria allo scopo di:

- abituare gli allievi alla **comprensione di testi di matematica**
- sviluppare **capacità critiche e dimostrative**
- collegare **lo sviluppo della matematica con le altre discipline**, favorendo così anche la collaborazione con docenti di altre materie.

*Società Italiana di Storia delle Matematiche*  
*Il Giardino di Archimede. Un museo per la matematica*

*Convegno Nazionale*

**Il piacere di imparare - Il piacere di insegnare la matematica**  
**La storia della matematica in classe: dalle materne alle superiori**

**Montevarchi, 10-12 marzo 2011**

Diretto agli insegnanti di ogni ordine di scuola.

## **Progetto Lauree Scientifiche 3, 2010/2011**

### **Storia delle matematiche**

**Livia Giacardi**

Mio impegno:

due incontri: 5 ore

consulenza: correzione testi, ricerca materiali (circa 7 ore, non ho fatto il conto)

preparazione del *CD Letture matematiche. Pagine di matematica per la scuola*

(vedi Appendice): 20 ore circa

Temi nuovi: Le origini della geometria analitica

Letture matematiche. Pagine di matematica per la scuola

Temi vecchi: Sistemi di numerazione e tecniche di calcolo nel mondo antico

La nascita della matematica come scienza dimostrativa

Storia dell'algebra 1. Le equazioni di I e di II grado

Docenti:

#### **Docente : ALESSANDRA DEL PICCOLO**

Attività di sperimentazione: Il lungo viaggio della geometria analitica

Scuola: IMS "Berti" - Torino

Classe: IIIA (indirizzo socio-psico-pedagogico), 22 allievi, tutti coinvolti nel progetto

Ore impiegate per la preparazione del materiale: 4 ore riunioni con prof.ssa Giacardi e altri docenti impegnati su progetti analoghi

Ore per la preparazione dei materiali utilizzati per le lezioni, le attività in classe e le prove di verifica: : 6 ore

Le lezioni si sono svolte in orario curricolare durante i mesi di febbraio - marzo.

#### **Docente : MILDA GASPARETTO**

Attività di sperimentazione: La nascita della geometria analitica: LE CONICHE

Scuola: I.I.S. "Arimondi-Eula" di Savigliano (Cn)

Classe: 3 B liceo scientifico P.N.I

Alunni coinvolti: 27 allievi

Ore di sperimentazione in classe: 25

Ore di preparazione materiali: 15

Ore impegnate a consuntivo dell'attività svolta: 5

#### **Docente: GOBETTI LAURA**



Attività di sperimentazione: Storia della Matematica. Storia dell'algebra: equazioni di I e II grado.

Scuola: I.I.S. "8 marzo"/ sez. liceo scientifico - Settimo Torinese

Alunni coinvolti: i 26 alunni della classe II C liceo (IIS "8 marzo"/sez.

liceo scientifico - Settimo Tor.) per 10 ore di lezione + 1 ora di test

Ore di preparazione materiale: 8 ore

Docenza: 11 ore

**Docente : Maria Luisa Anselmo**

Attività di sperimentazione: Letture commentate di "Sopra le scoperte dei dadi" di Galileo Galilei

Scuola: I T I " Porro", Pinerolo

classe: IA ITI meccanici

classe: IE ITI chimici

Alunni coinvolti nel progetto 24+21

ore impiegate per la preparazione del materiale:

4 ore riunioni con me o altri docenti coinvolti

8 ore tra preparazione e correzione degli elaborati

mesi in cui si sono svolte le lezioni: dicembre e gennaio

**Docente : Anna Lano**

Scuola: Liceo Scientifico Tecnologico "Amaldi"- Orbassano

Attività di sperimentazione:

Prima liceo scientifico scienze applicate 22 alunni : antichi sistemi di misurazione e la matematica nell'antico Egitto con le tecniche di calcolo

Seconda liceo scientifico tecnologico 20 alunni : la geometria greca, Talete, Pitagora, incommensurabilità

Terza liceo scientifico tecnologico 20 alunni : storia della geometria analitica

Quarta liceo scientifico tecnologico 12 alunni : la matematica nell' arte

In prima, seconda e terza sono state fatte verifiche.

**Docente : Anna Maria Zoppegni**

Attività di sperimentazione: La nascita della geometria analitica: LE CONICHE

Scuola: Liceo Classico "Gioberti" Torino

Ha partecipato agli incontri, è venuta al convegno in Toscana e mi ha detto di aver fatto la sperimentazione , ma non ha ancora risposto

**Docente : Margherita Bergesio**

Attività di sperimentazione: Storia dei sistemi di numerazione

Scuola: Liceo Classico "Govone" Alba

classe: IV ginnasio - sez. A

Alunni coinvolti: 25

Ore impiegate per la preparazione del materiale: ha utilizzato il materiale contenuto nei CD forniti

Riunioni con altri docenti coinvolti (insegnante di Storia, latino e greco)

Ore per la preparazione dei materiali utilizzati per le lezioni : 2 ore

Mesi in cui si sono svolte le lezioni: maggio - giugno ( 6 ore )

Appendice

### ***CD Letture matematiche. Pagine di matematica per la scuola***

#### **Elenco dei testi (in pdf) e degli argomenti**

- 1) **Archimede**, *Arenario*, in *Opere*, Classici della Scienza Utet 1974, la scrittura dei grandi numeri, pp. 458-462.
- 2) **Euclide**, *Gli Elementi*, in *Classici della scienza*, Utet, Torino, 1988: VII, principali definizioni, algoritmo di Euclide, infinità numeri primi.
- 3) **Diofanto**, *Les six livres d'arithmétiques et le livre des nombres polygones*, a cura di P. Ver Eecke, 1926, pp. 53-55, 280, 287 segg., terne pitagoriche, numeri poligonali. (Vedi anche Diophantus, *Les Arithmétiques*, a cura di R. Rashed, Paris, 1984 *Diophanti Alexandrini Opera Omnia*, a cura di P. Tannery, Lipsiae 1893)
- 4) **Brahmagupta e Bhaskara**, *Algebra with Arithmetic and mesuration from the Sanscrit of Brahme Gupta and Bhascara*, translated by H.T. Colebrooke, London 1817, pp. 131-138, il sistema di numerazione decimale posizionale, le operazioni, lo zero, equazioni di secondo grado, dimostrazioni « visive » delle identità notevoli.
- 5) **Al-Kwarizmi**, *Al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabalah* connessioni fra algebra e geometria nella soluzione delle equazioni di secondo grado
- 6) **O. Al-Khayyam**, *L'oeuvre algebrique d'Al-Khayyam, établie, traduite et analysée par R. Rashed e A. Djebbar*, l'uso delle coniche per risolvere le equazioni cubiche
- 7) **Leonardo Pisano**. *Liber Abaci*, in *Testi e studi*, Giardino di Archimede, CD-Rom, 2002, pp. 2-3, 24, il sistema di numerazione decimale posizionale, il problema dei conigli, e altro.
- 8) **N. Tartaglia** e i metodi di falsa posizione (transizione dall'aritmetica all'algebra) in *General Trattato*, 1556, Libro XVI e XVII.
- 9) **S. Stevin** e la diffusione delle frazioni decimali. Letture dalla *Disme* (1585). Il concetto di numero nel Cinquecento e Seicento.
- 10) **B. Pascal** e i criteri di divisibilità: *De numeris multiplicibus* in *Oeuvres complètes*, pp. 159-165.
- 11) **B. Pascal**, il triangolo aritmetico, la dimostrazione per induzione in *Traité du triangle Arithmétique* in *Oeuvres complètes*, p. 103.
- 12) **R. Descartes**, *Opere scientifiche (La geometria)*, Utet, Torino, 1983, creazione della geometria analitica, problema della retta tangente
- 13) **C. F. Gauss** e le congruenze, *Disquisitiones Arithmeticae*, Lipsiae 1801, pp. 1-7
- 14) **C.F. Gauss**, *Disquisitiones Arithmeticae*, Lipsiae 1801, Teorema fondamentale dell'aritmetica, pp. 9-10

#### **Elenco delle presentazioni in power point:**

- 1) Euclide e la scienza pura del numero
- 2) Logistica e aritmetica nel mondo greco
- 3) Diofanto di Alessandria (III sec.)
- 4) Il sistema di numerazione decimale posizionale e qualche aspetto dell'aritmetica indiana
- 5) Muhammed ibn Musa al-Khwarizmi e le equazioni di secondo grado
- 6) Omar al-Khayyam (1048 - 1123) e le equazioni di terzo grado
- 7) Leonardo Pisano
- 8) N. Tartaglia e i metodi di falsa posizione (transizione dall'aritmetica all'algebra)
- 9) Simon Stevin (1548-1620) e la diffusione dei numeri decimali

10) Blaise Pascal (1623-1662), criteri di divisibilità, dimostrazione per induzione

11) Descartes e il metodo per la ricerca della normale

12) Carl Friedrich Gauss (1777-1855), *Disquisitiones Arithmeticae* 1801: Il Teorema fondamentale dell'aritmetica, Le congruenze

## **Laboratorio di Storia delle matematiche 2005/2006 – 2006/2007**

### **Temi**

I temi proposti percorrono la maggior parte degli argomenti affrontati nei cinque anni di scuola secondaria superiore: storia dell'aritmetica, storia dell'algebra, storia della geometria, storia della trigonometria e storia dell'analisi. (v. file allegato)

### **Scopi**

presentare alcuni argomenti di storia della matematica collegati con i temi affrontati nel programma scolastico al fine di:

- illustrare su esempi opportunamente scelti, o attraverso letture mirate, la maturazione di certi concetti, metodi e tecniche in modo da mostrare la **genesi storica delle teorie matematiche** studiate, collocandole in un contesto culturale più ampio.
- **creare attività didattiche coerenti** con lo svolgimento del programma e che arricchiscano la cultura generale.
- avviare i ragazzi alla lettura di testi matematici classici

La storia permette, infatti, all'allievo di rendersi conto che la matematica non è una scienza statica, ma nasce e si sviluppa per risolvere problemi sia teorici che pratici e gli consente di stabilire **collegamenti interdisciplinari** con le altre scienze, con la filosofia, con l'arte, ecc. evidenziando il **carattere unitario del sapere**.

### **Le scuole aderenti al Progetto** (v. file allegato)

Le scuole che hanno aderito al Progetto nell'anno 2005-2006 sono 5: 4 licei classici e uno scientifico, ma solo 3 hanno effettivamente portato a termine la sperimentazione per la sovrapposizione con altre sperimentazioni.

Le scuole che hanno aderito nel 2006-2007 sono 19: 7 licei classici, 7 licei scientifici o tecnologici, 5 istituti professionali, dei quali 9 hanno sperimentato sulla base dei materiali da me forniti.

## **La sperimentazione al Liceo Classico Alfieri**

Farò riferimento alla sperimentazione realizzata presso il Liceo Classico Alfieri in quanto è quella che ho seguito personalmente.

Per espressa richiesta degli insegnanti, la sperimentazione è iniziata dalla IV ginnasio con l'intenzione di continuarla, aldilà del progetto Lauree Scientifiche, per tutti i 5 anni di liceo allo scopo di creare col tempo un vero e proprio curriculum di storia delle matematiche per licei classici integrato con i programmi. Vi ha partecipato tutta la classe, non solo gli allievi più brillanti

Nel primo anno di sperimentazione (2005-2006) le lezioni di storia, per invito degli insegnanti stessi, sono state tenute da me, mentre è stato loro compito quello di consolidare le conoscenze date, attraverso esercizi, attività varie e letture di passi opportunamente scelti, tratti dalle fonti prese in esame e, successivamente, di verificare l'apprendimento attraverso una prova finale.

### **I temi**

Dopo alcuni incontri preliminari, i temi prescelti dagli insegnanti nella rosa offerta sono stati per il 2005-2006 (v. file allegato)

**1) Sistemi di numerazione e tecniche di calcolo nel mondo antico**

**2) La nascita della matematica come scienza dimostrativa**

e per il 2006-2007

**3) Storia dell'algebra 1. Le equazioni di I e di II grado**

## Modalità di svolgimento

Le lezioni di storia della matematica (quattro ore per ciascun modulo) sono state preparate in Power Point in modo da lasciare una traccia del lavoro sia agli studenti che agli insegnanti e sono state precedute da un'attività preparatoria svolta dall'insegnante (lettura di testi scelti, esercizi, ecc.)

Nello svolgimento si è alternata la storia "narrata" alla storia "per problemi" con inserimento di opportune attività didattiche e esercizi proposti a partire dalla trattazione storica (evidenziati nel Power Point con pagine a quadretti) e con l'aiuto di sudditi didattici appositamente realizzati da un artigiano (numeri figurati, abachi, ecc.). Con la collaborazione dell'insegnante si è cercato di coinvolgere gli studenti nella lezione, proponendo domande e invitandoli a esprimere giudizi, in modo da dar vita a una lezione "dialogata". Questo ha stimolato una vera e propria gara fra i ragazzi incentivati a rispondere per primi ai vari quesiti, e ha rivelato, in alcuni casi, notevoli doti di intuizione in studenti "scolasticamente" giudicati modesti.

Le lezioni storiche sono state seguite da un'attività di consolidamento da parte dell'insegnante della classe, accompagnata spesso da letture di passi opportunamente scelti dai testi presi in esame.

## Finalità

Per ciascun modulo le finalità sono state le seguenti:

### 1) *Sistemi di numerazione e tecniche di calcolo nel mondo antico*

- presentare diversi sistemi di numerazione del mondo antico e le varie tecniche di calcolo,
- evidenziare i caratteri e i vantaggi dei sistemi posizionali rispetto a quelli additivi,
- riflettere sul concetto di base di un sistema di numerazione (e sul cambiamento di base), sull'importanza e sul ruolo dello zero,
- stimolare gli studenti a guardare alle civiltà del passato anche sotto l'aspetto del sapere scientifico.

### 2) *La nascita della matematica come scienza dimostrativa*

- riflettere su che cosa significa dimostrare, sul rapporto fra evidenza visiva e dimostrazione,
- riflettere su che cosa significa risolvere un problema, importanza degli strumenti scelti,
- stimolare alla scoperta,
- inquadrare lo studio della matematica in un più **ampio contesto culturale**,

### 3) *Storia dell'algebra 1. Le equazioni di I e di II grado*

- individuare la transizione dai metodi aritmetici (falsa posizione) a quelli algebrici,
- riflettere sull'importanza del simbolismo,
- evidenziare l'importanza dell'ampliamento del campo numerico,
- illustrare l'uso della geometria per introdurre i prodotti notevoli e per risolvere equazioni di secondo grado,

## Materiali prodotti

Relativamente ai primi due moduli è stato realizzato un Dossier contenente: un CD-Rom con i file delle lezioni in Power Point e in formato stampabile; copie di articoli di storia della matematica di riferimento; indicazioni bibliografiche essenziali, sia relative alla parte storica (fonti primarie e secondarie), sia finalizzate alla scelta di attività didattiche mirate; indicazioni di siti web utili e affidabili; copia delle prove di verifica. Il Dossier è stato fornito, oltre che al Liceo Classico Alfieri anche alle 9 scuole che nel 2006-2007 effettuano la sperimentazione su questi temi.

Per l'ultimo modulo è disponibile il file delle lezioni in Power Point.

Torino, 15.5.2007

Livia Giacardi